Determinarea constantei elastice a unui resort

Considerații teoretice

Metoda statică

Fie un resort de masă neglijabilă, lungime L_0 şi constantă elastică k, suspendat de capătul său superior. La capătul inferior este atârnat un corp de masă M. Resortul se alungeşte cu $\Delta L=L-L_0$ sub acțiunea greutății $M\cdot\mathbf{g}$ a corpului. Forța elastică "$k\cdot\Delta L$" şi greutatea "Mg" mențin sistemul corp-resort în echilibru:

$$M\cdot g = k\cdot\Delta L \tag{1}$$

de unde putem afla "k", constanta elastică a resortului:

$$k = M\cdot g/\Delta L \tag{2}$$

Relația (2) permite calcularea constantei elastice k a resortului, prin metoda statică. Masa M a corpului se află prin cântărire, ΔL se măsoară cu rigla, iar accelerația gravitațională este $g\cong 9{,}81\ m/s^2$.

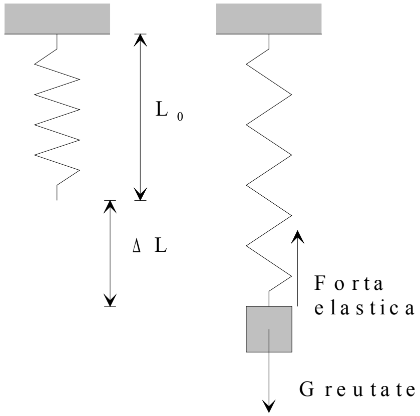

Figura 1. Deformarea unui resort sub acțiunea forței de greutate.

Metoda dinamică

Dacă scoatem sistemul din poziția de echilibru, alungind resortul cu x_0 prin intermediul unei forțe deformatoare, $\mathbf{F}_d$, şi apoi lăsându-l liber, acesta va executa o mişcare oscilatorie, de amplitudine x_0. Ecuația de mişcare a sistemului este:

$$M\cdot a= -k\cdot x \qquad \text{sau} \qquad d^2x/dt^2 +(k/M)\cdot x =0 \tag{3}$$

ținând seama că accelerația este derivata a doua a poziției.

Introducând noțiunea de pulsație a mişcării oscilatorii:

$$\omega=(M/k)^{1/2}. \tag{4}$$

putem scrie soluția ecuației (3) ca:

$$x(t) = x_0\cdot\sin(\omega\cdot t+\pi/2) \tag{5}$$

unde termenul "$\pi/2$" de la argumentul sinusului apare fiindcă la momentul inițial, t=0, elongația este x_0.

Deoarece legătura dintre pulsație şi perioadă este dată de relația:

$$\omega=2\cdot\pi/T \tag{6}$$

rezultă din ecuația (4) o formulă pentru constanta de elasticitate a resortului:

$$k = 4\cdot\pi^2\cdot M/T^2 \tag{7}$$

Aceasta reprezintă expresia constantei elastice a resortului, determinată prin metoda dinamică. Perioada T a mişcării oscilatorii se află cronometrând durata "t" a "n" oscilații complete (T= t/n), iar masa M se determină prin cântărire.

Influența masei resortului asupra oscilației

Dacă masa m a resortului nu este neglijabilă, trebuie luată în considerare contribuția ei la perioada oscilațiilor. Masa m a resortului este uniform distribuită de-a lungul lungimii sale L. Densitatea liniară de masă este $\mu= m/L$. Masa elementului de lungime dx, aflat la distanța x de punctul O de susținere, se scrie:

$$dm = \mu\cdot dx = (m/L)\cdot dx \tag{8}$$

Presupunem o variație liniară a vitezei de la $v_0=0$ (capătul fix o este în repaus) până la $v_{max}=v$ (viteza capătului liber la trecerea prin poziția de echilibru), când x ia valori de la 0 la L. În consecință, viteza elementului dx, aflat la distanța x de punctul de susținere, va fi:

$$v_x = v\cdot x/L \tag{9}$$

Energia cinetică a elementului de masă dm este:

$$dE_C = dm_x\cdot v_x^2/2 = (m/L)\cdot dx\cdot(v\cdot x/L)^2/2 \tag{10}$$

sau:

$$dE_C = dx \cdot m \cdot v^2 \cdot x^2/(2 \cdot L^3) \qquad (11)$$

Efectuând integrarea, se află energia cinetica a întregului resort (de masă m şi lungime L) când extremitatea inferioară trece prin poziția de echilibru:

$$E_C = (m/3) \cdot v^2/2 \qquad (12)$$

Rezultatul (12) exprimă contribuția masei resortului la energia cinetică de oscilație a întregului sistem corp-resort. Această contribuție este aceeaşi cu cea a unui corp cu masa m/3, atârnat la capatul liber al resortului ideal (fără masă).

Energia cinetică maximă a întregului sistem masă-resort este:

$$W_C = (M+m/3) \cdot v^2/2 \qquad (13)$$

unde valoarea maximă a vitezei este dată de relația:

$$v = \omega \cdot A$$

Egalând expresia (13) cu energia potențială maximă $W_p = k \cdot A^2/2$, se obține pentru constanta elastică a resortului k, expresia:

$$k = (M+m/3) \cdot 4 \cdot \pi^2/T^2 \qquad (14)$$

În calculele de mai sus, a fost luată în considerare expresia $\omega = 2 \cdot \pi/T$. Relația (14) permite aflarea constantei unui resort elastic prin metoda dinamică, dacă se cunosc masa corpului "M", masa resortului "m" şi se măsoară durata "t" a "n" oscilații, aflându-se astfel perioada T= t/n.

Metoda experimentală

Metoda statică

1. Se citeşte poziția inițială a capătului inferior al resortului.
2. Se atârnă pe rând masele marcate M_1, M_2 etc. măsurându-se, de fiecare dată, alungirile ΔL_1, ΔL_2 etc.
3. Datele se trec în tabelul A.
4. Se calculează k cu relația (2) şi se completează tabelul A.
5. Calculul erorilor se face cu relația: $\Delta k/k = \Delta M/M + \Delta g/g + \Delta(\Delta L)/\Delta L$
6. Rezultatul final se dă sub forma: $k = k_{mediu} \pm \Delta k$
   unde $\Delta k = k_{mediu} \times (\Delta k/k)$

Tabelul A

m (g)	M (g)	ΔL (mm)	k (N/m)	k_{mediu} (N/m)	Δk/k (%)

Metoda dinamică

1. Se stabileşte poziția de echilibru a resortului cu masa marcată M_1.
2. Se pune în oscilație sistemul masă-resort, provocând o alungire inițială de 2 - 3 cm.
3. Se cronometrează n=20 de oscilații complete şi se determină perioada de oscilație T_1=t/n.
4. Se repetă operațiile pentru corpul M_2 etc.;
5. Rezultatele se trec în tabelul B.
6. Se calculează k cu relația (14) şi se completează tabelul B.
7. Calculul erorilor se face cu relația:
   $\Delta k/k = 2 \cdot \Delta T/T + \Delta(M+m/3)/(M+m/3) + 2 \cdot \Delta\pi/\pi$

Tabelul B

m (g)	M (g)	M+m/3 (g)	T (s)	k (N/m)	k_{mediu} (N/m)	Δk/k (%)